

6. LINEÁRIS ALGEBRA

a) Kidolgozott feladatok

6.1. Legyen $\underline{a}^* = [2, 4, 3, -1]$; $\underline{b}^* = [1, -2, 3, 5]$; $\underline{c}^* = [8, -5, 6, 7]$.
Végezzük el a fenti vektorokkal az alábbi műveleteket!

a) $\underline{a} + \underline{c}$

b) $\underline{a} - \underline{c} + \underline{b}$

c) $2\underline{a} - 3\underline{b} + \underline{c}$

d) $\frac{2}{3}(\underline{a} - 2\underline{b}) + \frac{3}{4}\underline{c}$ e) $\frac{2}{3}(\underline{a} - 2\underline{b}) + \frac{5}{6}(3\underline{a} + \frac{8}{5}\underline{b})$ f) $\frac{2}{3}[\frac{3}{4}(\underline{a} - \underline{b}) + \underline{c}]$

Megoldás:

a)
$$\underline{a} + \underline{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+8 \\ 4-5 \\ 3+6 \\ -1+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

b)
$$\underline{a} - \underline{c} + \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-8+1 \\ 4+5-2 \\ 3-6+3 \\ -1-7+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

c)
$$2\underline{a} - 3\underline{b} + \underline{c} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3+8 \\ 8+6-5 \\ 6-9+6 \\ -2-15+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix}$$

d)
$$\frac{2}{3}(\underline{a} - 2\underline{b}) + \frac{3}{4}\underline{c} = \frac{2}{3} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right) + \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ -3 \\ -11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -15/4 \\ 9/2 \\ 21/4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & + & 6 \\ 16/3 & - & 15/4 \\ -2 & + & 8/2 \\ -22/3 & + & 21/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ \frac{64}{12} - \frac{45}{12} \\ 5/2 \\ -\frac{88}{12} + \frac{63}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 19/12 \\ 5/2 \\ -25/12 \end{bmatrix}$$

$$e) \frac{2}{3}(\underline{a}-2\underline{b}) + \frac{5}{6}(3\underline{a} + \frac{8}{5}\underline{b}) = \frac{2}{3}\underline{a} - \frac{4}{3}\underline{b} + \frac{15}{6}\underline{a} + \frac{8}{6}\underline{b} = \frac{4}{6}\underline{a} + \frac{15}{6}\underline{a} = \frac{19}{6}\underline{a} =$$

$$= \frac{19}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19/3 \\ 38/3 \\ 19/2 \\ -19/6 \end{bmatrix}$$

$$f) \frac{2}{3} \left[\frac{3}{4}(\underline{a}-\underline{b}) + \underline{c} \right] = \frac{1}{2}(\underline{a}-\underline{b}) + \frac{2}{3}\underline{c} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right) + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 + 16/3 \\ 2 - 10/3 \\ 3/2 + 4 \\ -1/2 + 14/3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 35/6 \\ -4/3 \\ 11/2 \\ 25/6 \end{bmatrix}$$

6.2. Legyenek adottak az A,B,C mátrixok és a $\alpha = 1,5$; $\beta = 2$; $\gamma = \frac{3}{4}$ skalárok.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Végezzük el az alábbi műveleteket:

a) $A+B$

b) $B-C$

c) $\gamma A - \alpha B$

d) $\alpha(A+B) - \beta(A+\gamma B)$

e) $\alpha C - \gamma A$

Megoldás:

a) $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

b) $B_{3 \times 3} - C_{3 \times 4}$ nem végezhető el, mivel a két mátrix nem azonos típusú.

c) $\gamma A - \alpha B = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - 1,5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 & 3/2 \\ -3/4 & 3/4 & 0 \\ 3/4 & 3/4 & 3/4 \end{bmatrix} -$
 $= \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & 0 \\ 1,5 & 3 & -1,5 \\ 4,5 & 1,5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/4 & 0 & 3/2 \\ -9/4 & -9/4 & 3/2 \\ -15/4 & -3/4 & -21/4 \end{bmatrix}$

$$d) \alpha(A+B) - \beta(A + \gamma B) = 1,5A + 1,5B - 2A - 2 \cdot \frac{3}{4} B = 1,5A - 2A + 1,5B - \frac{3}{2} B =$$

$$= 1,5A - 2A = -0,5A = \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & -1 \\ 0,5 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & -0,5 & -0,5 \end{bmatrix}$$

e) $\alpha C_{3 \times 4} - \gamma A_{3 \times 3}$ nem végezhető el, mivel a két mátrix nem azonos típusú.

6.3. Legyenek adottak az alábbi vektorok és mátrixok:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \underline{f} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 6 & 8 \\ -6 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 3 \\ 6 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 9 & 8 & -7 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 4 \\ -8 & 0 & -6 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Végezzük el az alábbi műveleteket:

- | | | | |
|---|--|--|---|
| a) $\underline{a}^* \cdot \underline{d}$ | b) $\underline{b}^* \cdot \underline{a}$ | c) $\underline{d}^* \cdot \underline{c}$ | d) $\underline{e}^* \cdot \underline{d}$ |
| e) $\underline{e} \cdot \underline{f}$ | f) $(\underline{a}^* \cdot \underline{b}) \underline{e}$ | g) $\underline{a}^* \cdot (\underline{b} \cdot \underline{e})$ | h) $\underline{d}(\underline{e}^* \cdot \underline{f})$ |
| i) $A \cdot B$ | j) $C \cdot D$ | k) $\underline{c} \cdot D$ | l) $D \cdot \underline{c}$ |
| m) $A(\underline{a}^* \cdot \underline{d})$ | n) $(\underline{a} \cdot \underline{d}^*) D$ | o) $\underline{a}^* \cdot D \cdot \underline{d}$ | p) $\underline{b}^* \cdot B \cdot \underline{c}$ |
| g) $A \cdot D^*$ | r) $D^* \cdot A$ | s) $B^* \cdot A^*$ | t) $B \cdot \underline{c}$ |

Megoldás:

$$a) \underline{a}^* \cdot \underline{d} = [2, -1, 3] \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 4 + (-1)(-3) + 3 \cdot 2 = 17$$

$$b) \underline{b}^* \cdot \underline{a} = [1, 0, 0] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 = 2$$

$$c) \underline{d}^* \cdot \underline{c} = [4, -3, 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 - 3 + 2 = 3$$

d) $\underline{e}^* \cdot \underline{d} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ nem végezhető el, mert nem egyezik az elemszám

e) $\underline{e} \cdot \underline{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ nem végezhető el, mert a sor-oszlop kompozícióhoz oszlopvektort oszlopvektorral nem szorozhatunk (kivéve ha mindkettő 1 elemű)

f) $(\underline{a}^* \cdot \underline{b}) \cdot \underline{e} = \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

g) $\underline{a}^* \cdot (\underline{b} \cdot \underline{e}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ nem végezhető el a $\underline{b}_{3 \times 1} \cdot \underline{e}_{4 \times 1}$ szorzás

h) $\underline{d}(\underline{e}^* \cdot \underline{f}) = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot (3+2+1) = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 6 = \begin{bmatrix} 24 \\ -18 \\ 12 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 6 & 8 \\ -6 & 1 & 7 \end{bmatrix}_{4 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} -8 & 0 & 3 \\ 6 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & & & -12 \\ & 20 & & \\ & & & \end{bmatrix}_{4 \times 3}$

A B C

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \cdot 0 + 6 \cdot (-2) + 8 \cdot 4 = 20$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix} = 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-5) - 2 \cdot 9 = -12$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = -8 + 2 \cdot 6 - 4 \cdot 1 = 0$$

Hasonlóan számoljuk ki a többi elemet is. A szorzást végezhetjük a Falk-féle elrendezés szerint is:

$$B = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 3 \\ 6 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 & -20 & -43 \\ 2 & 0 & -2 & -18 & -8 & -12 \\ 4 & 6 & 8 & 12 & 20 & 54 \\ -6 & 1 & 7 & 61 & 26 & 40 \end{bmatrix}$$

Ebben az elrendezésben jobban látható az a szabály, miszerint az $A \cdot B$ szorzás csak akkor végezhető el, ha A-nak annyi oszlopa van, mint ahány sora B-nek.

j) $C_{3 \times 5} \cdot D_{3 \times 3}$ nem végezhető el, mert C-nek 5 oszlopa van és B-nek csak 3 sora

k) $C_{3 \times 1} \cdot D_{3 \times 3}$ C egyetlen oszlopvektor, D-nek pedig 3 sora van, így ez sem végezhető el.

e) $D \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0 + 1 \\ 0 + 1 + 1 \\ 0 - 1 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

m) $A(\underline{a}^x \cdot \underline{d}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 6 & 8 \\ -6 & 1 & 7 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2, -1, 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 6 & 8 \\ -6 & 1 & 7 \end{bmatrix} 17 = \begin{bmatrix} 17 & 34 & -68 \\ 34 & 0 & -34 \\ 68 & 102 & 136 \\ -102 & 17 & 119 \end{bmatrix}$

$$2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 17$$

n) $(\underline{a} \cdot \underline{d}^x)$ D Először számítsuk ki az $\underline{a} \cdot \underline{d}^x$ szorzatot. Jegyezzük meg, hogy

$$\underline{d}^* = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -6 & 4 \\ -4 & 3 & -2 \\ 12 & -9 & 6 \end{bmatrix}$$

ha ugyanannyi elemű oszlopvektort szorzunk sorvektorral, annak eredménye egy mátrix!

Ezután az $(\underline{a} \cdot \underline{d}^*)$ D szorzatot szintén a Falk-féle elrendezés szerint számítjuk ki!

			1	0	1
			0	1	1
			1	-1	0
8	-6	4	12	-10	2
-4	3	-2	-6	5	-1
12	-9	6	18	-15	3

Az egyes elemek kiszámítását le is írjuk:

$$8 \cdot 1 - 6 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 12; \quad 8 \cdot 0 - 6 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -10$$

$$8 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 2;$$

$$-4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -6; \quad -4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 5$$

$$-4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = -1;$$

$$12 \cdot 1 - 9 \cdot 0 + 6 \cdot 1 = 18; \quad 12 \cdot 0 - 9 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) = -15$$

$$12 \cdot 1 - 9 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 3$$

o) $\underline{a}^* \underline{D} \underline{d}$

A két táblázatot egybeírva:

			1	0	1		4
			0	1	1		-3
			1	-1	0		2
2	-1	3	5	-4	1		
			5	-4	1		34

p)

$\underline{b}^* \underline{B} \underline{c}$

			-8	0	3	1
			6	-2	-5	1
			1	4	9	1
1	0	0	-8	0	3	-5

q) $\underline{A} \cdot \underline{D}^*$

$$\underline{D}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{A} =$

			1	0	1	2	
			0	1	-1	0	$= \underline{x}$
			1	1	0	2	
1	2	-4	-3	-2	-1	-6	
2	0	-2	0	-2	2	0	
4	6	8	12	14	-2	24	$= \underline{y}$
-6	1	7	1	8	-7	2	
1	9	9	10	18	-8		
			$\underline{u}^*$	$\underline{v}^*$			

A szorzás helyességét sor- illetve oszlop-összeg próbával ellenőrizzük.

Sorösszegpróba

Adjuk össze a D^* és az eredmény mátrix elemeit soronként. Ekkor teljesülni kell az

$$A \cdot \underline{x} = \underline{y} \quad \text{egyenlőségnek.}$$

Részletesen:

$$\begin{bmatrix} 1, 2, -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -6 \quad \begin{bmatrix} 4, 6, 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 24$$

$$\begin{bmatrix} 2, 0, -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} -6, 1, 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2$$

Oszlopösszeg próba

Adjuk össze az A és az eredmény mátrix elemeit oszloponként. Ekkor teljesülni kell az

$$\underline{u}^* D^* = \underline{v}^* \quad \text{egyenlőségnek.}$$

Részletesen:

$$\begin{bmatrix} 1, 9, 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 10 \quad \begin{bmatrix} 1, 9, 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 18$$

$$\begin{bmatrix} 1, 9, 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -8$$

r) $C^* A$ $C_{3 \times 5}$ ezért $C_{5 \times 3}^* A_{4 \times 3}$

Mivel C^* oszlopainak száma (3) nem egyezik meg az A sorainak számával (4), ezért a $C_{5 \times 3}^* A_{4 \times 3}$ szorzás nem végezhető el.

s) $B_{3 \times 3}^* \cdot A_{3 \times 4}^*$

$$B^* = \begin{bmatrix} -8 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 9 \end{bmatrix} \quad A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & 6 & 1 \\ -4 & -2 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

			1	2	4	-6
			2	0	6	1
			-4	-2	8	7
-8	6	1	0	-18	12	61
0	-2	4	-20	-8	20	26
3	-5	9	-43	-12	54	40

t) $B \cdot \underline{c} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 3 \\ 6 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 14 \end{bmatrix}$

6.4. Legyenek adottak az alábbi vektorok:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Válaszoljunk az alábbi kérdésekre:

- Lineárisan függetlenek-e az $\underline{a}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorok?
- Lineárisan függetlenek-e az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok?
- Mennyi az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorrendszer rangja?
- Előállítható-e az $\underline{x}$ vektor az $\underline{a}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorok lineáris kombinációjaként?
- Előállítható-e az $\underline{x}$ vektor az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként?
- Előállítható-e az $\underline{y}$ vektor az $\underline{a}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorok lineáris kombinációjaként?

Megoldás:

A kérdéseket a bázistranszformáció segítségével válaszoljuk meg.

a)

	$\underline{a}$	$\underline{c}$	$\underline{d}$	$\underline{c}$	$\underline{d}$	$\underline{d}$
$\underline{a} \quad \underline{e}_1$	1	3	2	3	2	-1
$\underline{e}_2$	4	3	-1	-9	-9	0
$\underline{c} \quad \underline{e}_3$	-1	3	4	6	6	1

Az utolsó táblázatból leolvasható, hogy $\underline{d} = -\underline{a} + \underline{c}$, tehát a $\underline{d}$ vektor előállítható az $\underline{a}$ illetve $\underline{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként, tehát nem függetlenek. Ez abból látszik, hogy nem vonható be a bázisba mindhárom vektor.

b)

	$\underline{a}$	$\underline{b}$	$\underline{c}$	$\underline{b}$	$\underline{c}$	$\underline{c}$
$\underline{a} \quad \underline{e}_1$	1	2	3	2	3	3/5
$\underline{c} \quad \underline{e}_2$	4	0	3	-8	-9	3/5
$\underline{b} \quad \underline{e}_3$	-1	3	3	5	6	6/5

Mindhárom vektor bevonható a bázisba, ezért függetlenek.

c) Vektorrendszer rangja = a bázisba bevonható vektorok darabszáma:

	<u>a</u>	<u>b</u>	<u>c</u>	<u>d</u>	<u>a</u>	<u>b</u>	<u>d</u>	<u>a</u>	<u>d</u>	<u>a</u>
<u>b</u> $\underline{e}_1$	1	2	3	2	-3	<u>2</u>	3	-3/2	3/2	0
<u>c</u> $\underline{e}_2$	4	0	<u>3</u>	-1	4/3	0	-1/2	4/3	-1/33	1
<u>d</u> $\underline{e}_3$	-1	3	3	4	-5	3	5	-1/2	<u>1/2</u>	-1

Tehát az a, b, c, d vektorrendszer rangja 3.

d)

	<u>a</u>	<u>c</u>	<u>d</u>	<u>x</u>	<u>c</u>	<u>d</u>	<u>x</u>	<u>d</u>	<u>x</u>
<u>a</u> $\underline{e}_1$	<u>1</u>	3	2	4	3	2	4	-1	2
$\underline{e}_2$	4	3	-1	9	-9	-9	-7	0	-1
<u>c</u> $\underline{e}_3$	-1	3	4	0	<u>6</u>	6	4	1	4/6

Látható, hogy $\underline{x} = 2\underline{a} - \underline{e}_2 + \underline{c}$, tehát x em állítható elő az a, c, d vektorok lineáris kombinációjaként.

e)

	<u>a</u>	<u>b</u>	<u>c</u>	<u>x</u>	<u>a</u>	<u>c</u>	<u>x</u>	<u>a</u>	<u>x</u>	<u>x</u>
<u>c</u> $\underline{e}_1$	1	2	3	4	5/3	<u>1</u>	4	5/3	4	-1
<u>a</u> $\underline{e}_2$	4	0	3	9	4	3	9	<u>-1</u>	-3	3
<u>b</u> $\underline{e}_3$	-1	<u>3</u>	3	0	-1/3	1	0	-2	-4	2

Tehát $\underline{x} = 3\underline{a} + 2\underline{b} - \underline{c}$, azaz x előállítható az a, b, c vektorok lineáris kombinációjaként.

f)

	<u>a</u>	<u>c</u>	<u>d</u>	<u>y</u>	<u>c</u>	<u>d</u>	<u>y</u>	<u>d</u>	<u>y</u>
<u>a</u> $\underline{e}_1$	<u>1</u>	3	2	7	3	2	7	-1	-2
$\underline{e}_2$	4	3	-1	1	-9	-9	-27	0	0
<u>c</u> $\underline{e}_3$	-1	3	4	11	<u>6</u>	6	18	1	3

Tehát $\underline{y} = -2\underline{a} + 3\underline{c}$, azaz y előállítható az a, c, d vektorok lineáris kombinációjaként.

6.5. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket:

a) $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$
 $3x_1 - x_2 + x_3 = 2$
 $-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$

b) $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 12$
 $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 14$
 $-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8$

c) $2x_1 + x_2 + x_3 = 3$
 $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$
 $-2x_1 - 11x_2 + x_3 = -13$

d) $-x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 12$
 $-x_2 + x_3 = 4$
 $-5x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 8$
 $x_1 - 2x_2 - 2x_4 = -8$

Megoldás:

a)

	x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$	x_1	x_2	$\underline{b}$	x_1	$\underline{b}$	$\underline{b}$
$x_2 \underline{e}_1$	2	1	1	6	4	-2	2	-2	-1	3
$x_1 \underline{e}_2$	3	-1	1	2	5	-4	-2	-3	-6	2
$x_3 \underline{e}_3$	-2	3	1	4	-2	3	4	4	7	-1

Tehát egyértelmű megoldás van: $x_1=2$; $x_2=3$; $x_3=-1$.

Ellenőrizzük: $2 \cdot 2 + 3 - 1 = 6$

$3 \cdot 2 - 3 - 1 = 2$

$-2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 1 = 4$

b)

	x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$	x_1	x_3	$\underline{b}$	x_3	$\underline{b}$
$x_2 \underline{e}_1$	2	1	3	12	2	3	12	1	28/5
$x_1 \underline{e}_2$	3	-1	2	4	5	5	16	1	16/5
$\underline{e}_3$	-2	3	1	8	-8	-8	-28	0	$-\frac{12}{5}$

Az egyenletrendszernek nincs megoldása.

c)

	x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$	x_1	x_2	$\underline{b}$	x_2	$\underline{b}$
$x_3 \quad \underline{e}_1$	2	1	1	3	2	1	3	-5	-5
$x_1 \quad \underline{e}_2$	3	-1	2	2	-1	-3	-4	3	4
$\underline{e}_3$	-2	-11	-1	-13	-4	-12	-16	0	0

Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, melyek közül az $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = -5$ le is olvasható.

Általános megoldás:
$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} x_2$$

Ha $x_2 = 1$, akkor
$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ azaz } x_3=0, x_1=1.$$

Ha $x_2 = 2$, akkor
$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \text{ azaz } x_3=5, x_1=-2.$$

d)

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{b}$	x_1	x_2	x_4	$\underline{b}$	x_2	x_4	$\underline{b}$	x_4	$\underline{b}$
$\underline{e}_1$	-1	1	1	2	12	-1	2	2	8	0	0	0	0	0
$x_3 \quad \underline{e}_2$	0	-1	1	0	4	0	-1	0	4	-1	0	4	1	10
$x_2 \quad \underline{e}_3$	-5	3	1	4	8	-5	4	4	4	-6	-6	-36	1	6
$x_1 \quad \underline{e}_4$	1	-2	0	-2	-8	1	-2	-2	-8	-2	-2	-8	0	4

Általános megoldás van:
$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4$$

Megjegyzés: Homogén egyenletrendszerek esetén:

- nem fordulhat elő, hogy nincs megoldás, hiszen az $x_1=x_2=\dots=x_n=0$ úgynevezett triviális megoldás mindig megoldása az egyenletrendszernek,

- b oszlopa a megoldás során végig csupa 0 értékből áll, így ezt az oszlopot a táblázatba be sem írjuk (legfeljebb az utolsó táblázat végére írjuk be).

6.6. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array} \\ \text{b)} & \begin{array}{l} 2x_1 + 8x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_4 = 0 \\ x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 10x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{array} \end{array}$$

Megoldás

a)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_2	x_3	x_4	x_3	x_4	x_4	b
$x_4 \xrightarrow{e_1}$	3	2	-4	2	-1	-7	-1	-7	2	-143/2	0
$x_3 \xrightarrow{e_2}$	2	-4	0	5	-6	-2	3	-2	21	-21/2	0
$x_2 \xrightarrow{e_3}$	3	4	3	6	1	0	3	0	3	3	0
$x_1 \xrightarrow{e_4}$	1	1	1	1	1	1	1	1	-2	17/2	0

Egyértelműen csak a triviális megoldás van, azaz $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

b)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_2	x_3	x_4	x_2	x_4	b
e_1	2	8	-4	-4	12	-4	-12	0	0	0
$x_1 \xrightarrow{e_2}$	2	-4	0	8	-2	0	4	-2	4	0
e_3	1	-8	2	10	-6	2	6	0	0	0
$x_3 \xrightarrow{e_4}$	1	1	-1	1	3	-1	-3	-3	3	0

Általános megoldás van: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$

b) Feladatok

A megoldások a 145. oldaltól találhatók.

$$6.7. \quad \underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Végezzük el a fenti vektorokkal az alábbi műveleteket:

- | | |
|--|--|
| a) $\underline{a} + \underline{b}$ | e) $\underline{a} + (\underline{b} - \underline{c})$ |
| b) $\underline{a} - \underline{b}$ | f) $2\underline{a} - 3\underline{b}$ |
| c) $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$ | g) $\underline{a} - 3\underline{b} + 2\underline{c}$ |
| d) $(\underline{a} + \underline{c}) - \underline{b}$ | h) $2\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$ |

$$6.8. \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

Végezzük el a fenti mátrixokkal az alábbi műveleteket:

- | | | |
|-------------|------------------|-----------------|
| a) $A + B$ | b) $A + C^X$ | c) $A + B + C$ |
| d) $2A - C$ | e) $3A + 2B - C$ | f) $A + B - 2C$ |

$$6.9. \quad \underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Végezzük el a fenti vektorokkal az alábbi műveleteket:

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\underline{a}^* \cdot \underline{c}$ | b) $\underline{a}^* \cdot \underline{d}$ | c) $\underline{b}^* \cdot \underline{c}$ |
| d) $\underline{b}^* \cdot \underline{e}$ | e) $\underline{c}^* \cdot \underline{d}$ | f) $(\underline{c}^* \cdot \underline{e}) \cdot \underline{d}$ |
| g) $\underline{a}^* \cdot \underline{b}$ | h) $\underline{c} \cdot (\underline{b}^* \cdot \underline{d})$ | |

6.10. A feladatban az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$, $\underline{e}$ a 6.9. feladatbeli vektorok!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 6 & 8 \\ -6 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 3 \\ 6 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 9 & 8 & -7 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 4 \\ -8 & 0 & -6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

- a) $A \cdot B$ e) $A \cdot B \cdot C$ i) $\underline{e}^* \cdot B$ m) $(C^* \cdot B)A^*$
 b) $C \cdot B$ f) $B \cdot A \cdot \underline{d}$ j) $\underline{e} \cdot \underline{d}^*$ n) $\underline{e}^* \cdot B \cdot \underline{e}$
 c) $A \cdot C$ g) $A \cdot \underline{a}$ k) $A^* \cdot B$
 d) $B \cdot C$ h) $\underline{a}^* \cdot B$ l) $A^* \cdot B^*$

6.11. Adottak az alábbi $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ illetve $\underline{x}$ vektorok:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -11 \\ 19 \end{bmatrix}$$

- a) Lineárisan függetlenek-e az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok?
 b) Kifejezhető-e az $\underline{x}$ vektor az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként?

6.12. a) Adott az $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ harmadrendű egységvektorokból álló bázis, valamint erre a bázisra vonatkozóan az $\underline{a}^* = [2, 8, 1]$ és a $\underline{b}^* = [3, 1, 9]$ vektorok. Adjuk meg az $\underline{a}$ vektor koordinátáit (elemeit) az $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ bázisra, majd a $\underline{b}$ vektor koordinátáit az $\underline{a}$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ bázisra vonatkozóan!

b) Az $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ másodrendű egységvektorok bázisára vonatkozóan legyen $\underline{k}^* = [7, -6]$, $\underline{c}_1^* = [-2, 3]$, $\underline{c}_2^* = [2, 11]$. Adjuk meg a $\underline{k}$ vektor elemeit a $\underline{c}_1$, $\underline{c}_2$ vektor bázisára vonatkozóan!

6.13. Kompatibilis-e az alábbi $\underline{b}$ vektor az $\underline{a}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorokkal? Ha igen, akkor írjuk fel a lineáris kombinációt:

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

6.14. Állapítsuk meg az alábbi mátrixok rangját:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{5} & 4 & 2 \\ 7 & -8 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 6 & -3 & 2 \\ 3 & 7 & 3 \\ 4 & 11 & -1 \end{bmatrix}$$

6.15. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket:

$$\begin{array}{lcl} \text{a)} & x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 & \text{b)} \quad x - y + 2z = -1 \\ & x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 19 & \quad 2x + y - z = 9 \\ & 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = -9 & \quad -x + 2y + z = 0 \\ & -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{c)} & 3x_1 - x_2 + x_3 = 6 & \text{d)} \quad x_1 + x_2 + 4x_4 = 5 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 0 & \quad x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ & -2x_1 - 10x_2 + 6x_3 = 9 & \quad x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -1 \\ & & \quad 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{e)} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 & \text{f)} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 & \quad -x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4 - 2x_5 = -23 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 & \quad x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 + 9x_5 = -6 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 & \quad 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_5 = 23 \\ & & \quad -3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{g)} & x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 & \text{h)} \quad x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 12 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 = 1 & \quad 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 0 & \quad x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ & 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{i)} & x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 = 0 & \text{j)} \quad 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 0 & \quad -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ & -x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 & \quad x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 5 \\ & & \quad -4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ & & \quad 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{k)} & x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 & \text{l)} \quad 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 15 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 8 & \quad -x_1 + 2x_2 - x_3 = -7 \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -8 & \quad 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{m)} & x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 & \\ & -x_2 + x_4 = 2 & \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 & \\ & x_2 - x_3 - 3x_4 = 4 & \end{array}$$